РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №4
«Элементы теории игр и принятия решений»

Задание 1. Геометрическим методом найти решение игры с заданной платежной матрицей.

№1. $A=\begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,6 & 0,7 & 0,8 \\ 0,6 & 0,5 & 0,4 & 0,9 & 1,1 \end{pmatrix}$	**№16.** $A=\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 4 \\ 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$
№2. $A=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \\ 4 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$	**№17.** $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 8 \\ 2 & 9 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$
№3. $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$	**№18.** $A=\begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
№4. $A=\begin{pmatrix} 1,1 & 0,6 & 0,8 & 1,0 & 0,4 \\ 1,2 & 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}$	**№19.** $A=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 & 4 \\ 8 & 4 & 9 & 8 \end{pmatrix}$
№5. $A=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \\ 5 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$	**№20.** $A=\begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$
№6. $A=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$	**№21.** $A=\begin{pmatrix} 5 & 8 & 6 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$
№7. $A=\begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -3 & -4 & 3 \end{pmatrix}$	**№22.** $A=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
№8. $A=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -2 \\ -2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$	**№23.** $A=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$
№9. $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 5 \\ 7 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$	**№24.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \\ 5 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$
№10. $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$	**№25.** $A=\begin{pmatrix} 7 & -5 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

№11. $A=\begin{pmatrix} 7 & 10 & 8 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 7 & 10 & 8 \end{pmatrix}$	**№26.** $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
№12. $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \\ 6 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$	**№27.** $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \\ -2 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$
№13. $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$	**№28.** $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$
№14. $A=\begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$	**№29.** $A=\begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 7 & 2 & 9 & 3 \end{pmatrix}$
№15. $A=\begin{pmatrix} 7 & 3 & 6 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$	**№30.** $A=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 & -4 & 3 \\ -2 & 3 & 5 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

Задание 2. Найти решение игры с заданной платежной матрицей путем сведения ее к задаче линейного программирования.

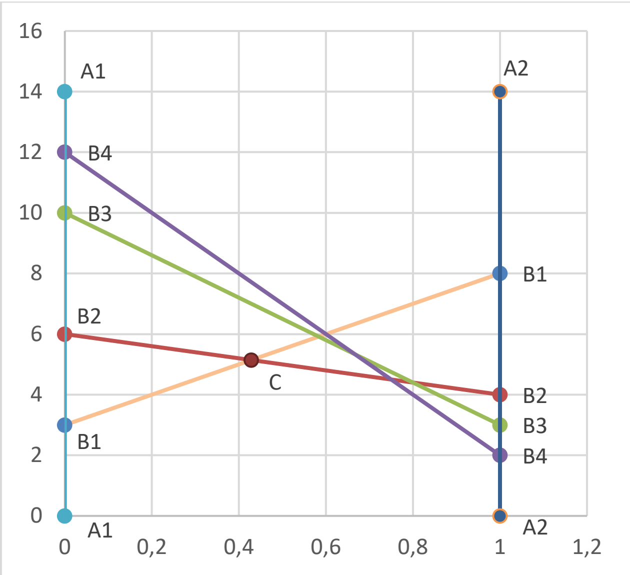
№1. $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$	**№16.** $A=\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$
№2. $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$	**№17.** $A=\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$
№3. $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$	**№18.** $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$
№4. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$	**№19.** $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$
№5. $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$	**№20.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
№6. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$	**№21.** $A=\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
№7. $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$	**№22.** $A=\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
№8. $A=\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	**№23.** $A=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$
№9. $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	**№24.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

№10. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$	**№25.** $A=\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
№11. $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$	**№26.** $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$
№12. $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$	**№27.** $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$
№13. $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$	**№28.** $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$
№14. $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$	**№29.** $A=\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$
№15. $A=\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	**№30.** $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Пример выполнения задания 1.

	B1	B2	B3	B4	
A1	3	6	10	12	3
A2	8	4	3	2	2
	8	6	10	12	

альфа = 3
бета = 6



Из рисунка определяем, что оптимальная смешанная стратегия игрока В включает стратегии В1 и В2.

Найдем вероятности использования стратегий А1 и А2 игроком А по формулам (выбираем столбцы матрицы, соответствующие полезным стратегиям игрока В - В1 и В2):

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = 0{,}57 \qquad p_2 = 1 - p_1 = 0{,}43.$$

Найдем цену игры по одной из формул:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v \end{cases} \qquad v = 5{,}14.$$

Найдем вероятности использования стратегий В1 и В2 игроком В по формулам, например, для полезной стратегии В1:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = v \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} q_1 = 0{,}29 \\ q_2 = 0{,}71 \end{matrix}$$

Таким образом, цена игры v = 5,14.

Оптимальные стратегии игроков: $S_A = \left\{ \frac{A_1}{0{,}57}, \frac{A_2}{0{,}43} \right\}; S_B = \left\{ \frac{B_1}{0{,}29}, \frac{B_2}{0{,}71} \right\}$

Пример выполнения задания 2.

Найти решение игры с заданной платежной матрицей путем сведения ее к задаче линейного программирования.

8	2	4
4	5	6
1	7	3

Для игрока А	Для игрока В
$\begin{cases} p_1a_{11}+p_2a_{21}+p_3a_{31}\ge v, \\ p_1a_{12}+p_2a_{22}+p_3a_{32}\ge v, \\ p_1a_{13}+p_2a_{23}+p_3a_{33}\ge v. \end{cases}$ (1) $p_1+p_2+p_3=1$	$\begin{cases} q_1a_{11}+q_2a_{12}+q_3a_{13}\le v, \\ q_1a_{21}+q_2a_{22}+q_3a_{23}\le v, \\ q_1a_{31}+q_2a_{32}+q_3a_{33}\le v. \end{cases}$ (1) $q_1+q_2+q_3=1$
Введем обозначения: $\frac{p_1}{v}=y_1;\frac{p_2}{v}=y_2;\frac{p_3}{v}=y_3$ (2)	Введем обозначения: $\frac{q_1}{v}=x_1;\frac{q_2}{v}=x_2;\frac{q_3}{v}=x_3$ (2)
$\begin{cases} y_1a_{11}+y_2a_{21}+y_3a_{31}\ge 1, \\ y_1a_{12}+y_2a_{22}+y_3a_{32}\ge 1, \\ y_1a_{13}+y_2a_{23}+y_3a_{33}\ge 1. \end{cases}$ $Z=y_1+y_2+y_3=\frac{1}{v}\to\min$	$\begin{cases} x_1a_{11}+x_2a_{12}+x_3a_{13}\le 1, \\ x_1a_{21}+x_2a_{22}+x_3a_{23}\le 1, \\ x_1a_{31}+x_2a_{32}+x_3a_{33}\le 1. \end{cases}$ $F=x_1+x_2+x_3=\frac{1}{v}\to\max$

Решим ЗЛП для игрока В

b\f	x1	x2	x3	b	bi/ai
x4	8	2	4	1	1/8
x5	4	5	6	1	1/4
x6	1	7	3	1	1
Fmax	-1	-1	-1	0	

b\f	x4	x2	x3	b	bi/ai
x1	0,13	0,25	0,5	0,13	0,5
x5	-0,5	4	4	0,5	0,13
x6	-0,1	6,75	2,5	0,88	0,13
Fmax	0,13	-0,8	-0,5	0,13	

b\f	x4	x5	x3	b
x1	0,16	-0,1	0,25	0,09
x2	-0,1	0,25	1	0,13
x6	0,72	-1,7	-4,3	0,03
Fmax	0,03	0,19	0,25	0,22

Используя соответствие переменных, получим решения взаимно двойственных ЗЛП:

f\b		y1	y2	y6	Zmin
	b\f	x4	x5	x3	
y4	x1	0,16	-0,1	0,25	0,09
y5	x2	-0,1	0,25	1	0,13
y3	x6	0,72	-1,7	-4,3	0,03
	Fmax	0,03	0,19	0,25	0,22

Откуда

0,09	0,13				0,03
x1	x2	x3	x4	x5	x6
y4	y5	y6	y1	y2	y3
		0,25	0,03	0,19	

Найдем цену игры $v = 1 / F\max = 4,6$.

Найдем вероятности использования стратегий игроками по формулам (2)

0,4	0,6				0,1
q1	q2	q3	q4	q5	q6
p4	p5	p6	p1	p2	p3
		1,1	0,1	0,9	

Видно, что полезными являются только две стратегии из трех для обоих игроков.

Таким образом, цена игры v = 4,6.

Оптимальные стратегии игроков: $S_A = \left\{ \dfrac{A_1}{0,1}, \dfrac{A_2}{0,9} \right\}; S_B = \left\{ \dfrac{B_1}{0,4}, \dfrac{B_2}{0,6} \right\}$